L'Actualité économique

Ressource épuisable contre ressource renouvelable : le cas du gravier et du vin dans le Bordelais

Exhaustible versus non exhaustible resources: The case of gravel and vineyard in the Bordelais

Jean-Pierre Amigues

Volume 61, numéro 1, mars 1985

URI : https://id.erudit.org/iderudit/601319ar
DOI : https://doi.org/10.7202/601319ar

Aller au sommaire du numéro

Éditeur(s)

HEC Montréal

ISSN

0001-771X (imprimé)
1710-3991 (numérique)

Résumé de l'article

L’exploitation d’une gravière a pour effet d’altérer irrémédiablement les potentialités économiques de la surface. Le gravier, ressource non renouvelable, est en concurrence avec le vignoble, ressource renouvelable. On examine l’allocation intertemporelle de ces deux ressources dans le cas de marchés concurrentiels parfaits.

L'Actualité Économique. Revue d'analyse économique, vol. 61 no 1 mars 1985

RESSOURCE ÉPUISABLE CONTRE RESSOURCE RENOUVELABLE : LE CAS DU GRAVIER ET DU VIN DANS LE BORDELAIS*

Jean-Pierre AMIGUES
GREMAQ – UA. 947 – CNRS
Université des Sciences Sociales de Toulouse

L'exploitation d'une gravière a pour effet d'altérer irrémédiablement les potentialités économiques de la surface. Le gravier, ressource non renouvelable, est en concurrence avec le vignoble, ressource renouvelable. On examine l'allocation intertemporelle de ces deux ressources dans le cas de marchés concurrentiels parfaits.

Exhaustible versus non exhaustible resources : the case of gravel and vineyard in the Bordelais. — The exploitation of a gravel pit destroys the economic potentialities of its surface. Gravel, an exhaustible resource, competes with vineyard, a non exhaustible one. The intertemporal allocation of those two resources is examined here under the assumption of perfect competition.

INTRODUCTION

L'exploitation d'une ressource non renouvelable a généralement peu d'influence sur des activités économiques s'exerçant dans son environnement immédiat, soit parce qu'elle s'effectue dans un milieu naturel sans potentialité économique significative (exploitation pétrolière au Moyen-Orient ou en mer du Nord, par exemple), soit qu'elle n'intéresse que le sous-sol (extraction minière par puits). Toutefois l'extraction d'une ressource en terre peut avoir pour effet d'altérer irrémédiablement les potentialités économiques de la surface. Ce type de problème s'est posé en Gironde où l'exploitation des gravières en pleine terre se heurta à de vives

* Je tiens à remercier le programme PIREN pour son soutien financier, Michel Moreaux et Jean-Jacques Laffont pour leurs conseils. Toutes erreurs ou omissions sont de mon entière responsabilité.

résistances de la part des organisations agricoles et plus particulièrement des viticulteurs de la région de Bordeaux pour qui le développement des extractions de matériaux de carrière constituait au moins à terme une menace grave pour un vignoble réputé.

À défaut de réaménagements importants sur le site, et d'un coût prohibitif, l'extraction rend généralement impossible la reprise d'une activité agricole. L'exploitation du gravier, ressource non renouvelable, s'accompagne donc d'un processus de disparition progressive d'une activité agricole (exploitation d'une ressource renouvelable), la viticulture, spécifique en raison de la qualité du produit, à la région de Bordeaux.

On montre qu'au moins dans un cas certain, sous certaines hypothèses, un système de marchés concurrentiels parfaits pour les deux ressources est susceptible d'évoluer en équilibre intertemporel. D'autre part, on montre que cet équilibre est unique et réalise une allocation intertemporelle des ressources optimale au sens de la maximisation du surplus social net actualisé lorsqu'il existe un taux d'actualisation social, constant et positif, égal au taux de l'intérêt à l'équilibre sur le marché des capitaux supposé concurrentiel parfait.

Il est intéressant de remarquer que dans ce cas, la non-convexité des plans de production intertemporels n'empêche pas l'existence d'un équilibre. On montre également que l'exploitation du stock de ressource non renouvelable peut être incomplète auquel cas la durée d'extraction est nécessairement infinie. Sous certaines conditions suffisantes on montre l'optimalité d'un tel sentier d'extraction de durée infinie.

Le paramètre du taux d'intérêt joue un rôle crucial dans ce type de modèle dynamique. On montre que les effets d'une variation du taux d'intérêt sur les sentiers d'équilibre des prix des ressources sont ambigus et dépendent en particulier des valeurs relatives des pentes des fonctions de demande des ressources.

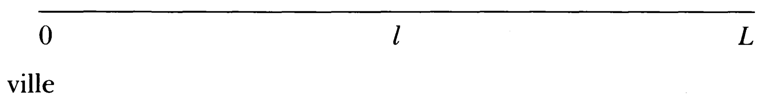
Cet article est divisé en quatre sections. La première section constitue une présentation du modèle et des hypothèses utilisées. L'étude du sentier d'équilibre du prix du matériau et de ses principales caractéristiques fait l'objet de la seconde section. Le problème de l'optimalité d'un tel sentier est traité dans une troisième section. Une analyse de dynamique comparative du sentier d'équilibre lorsque le taux d'intérêt varie est effectuée à la quatrième section.

Section I : LE MODÈLE

Considérons un gisement de gravier présentant les caractéristiques suivantes : le matériau est contenu le long d'un segment de droite ayant pour origine une ville, unique centre de consommation du gravier (point 0 dans l'échelle des distances), et pour extrémité L. La densité du matériau est supposée constante, et égale à un par un choix approprié des unités de mesure, i.e. chaque point du segment $[0,L]$ est susceptible de fournir une unité de ressource. Notons 1 la distance à la ville d'un point 1 du segment, le stock total de ressources est égal à L.

FIGURE 1

TOPOGRAPHIE DE L'EXPLOITATION



Le seul coût supporté par l'exploitation est un coût de transport, supposé proportionnel à la distance et à la quantité livrée en ville. On note v le coût de transport d'une unité de ressource par unité de distance.

Le temps est une variable continue, à chaque instant le matériau fait l'objet d'une demande en ville que, pour simplifier, on supposera linéaire, à coefficients constants, de la forme :

$$\forall\, t \in [0,\infty)\; P_m(t) = \text{Max}\,[a - bQ_m(t),\, 0] \quad a,b > 0 \tag{1}$$

où $P_m(t)$ et $Q_m(t)$ désignent respectivement le prix instantané et la quantité totale de matériau livrée en ville à l'instant t.

Le segment $[0,L]$ est également susceptible de produire un bien agricole spécifique de façon certaine, à raison d'une unité de bien par point de terre i.e. la productivité agricole spécifique est supposée constante et unitaire. Cette hypothèse de spécificité peut être relâchée partiellement en supposant que l'offre de bien agricole sur d'autres sites que $[0,L]$ est constante au cours du temps.

Il est impossible de poursuivre l'activité agricole spécifique en un point l quelconque du segment lorsque l'extraction même d'une partie du matériau contenu en ce point est entreprise. Une fois le gravier contenu au point l totalement extrait, il est possible d'entamer sur le site une activité résiduelle, non spécifique, permettant un gain ponctuel instantané constant R $(R = 0$ éventuellement).

La production agricole spécifique s'effectue sans coût. La demande de bien agricole est supposée linéaire, à coefficients constants de la forme :

$$\forall\, t \in [0,\infty)\; P_a(t) = \text{Max}[\alpha - \beta Q_a(t),\, 0] \quad \alpha, \beta > 0 \tag{2}$$

où $P_a(t)$ et $Q_a(t)$ désignent respectivement le prix instantané et l'offre instantanée de bien agricole égale à L en l'absence d'extraction.

L'objet du présent article est l'étude de la gestion patrimoniale d'un sol susceptible d'être affecté à deux activités mutuellement exclusives (extraction de ressource non renouvelable ou exploitation de ressource renouvelable), ce qui justifie l'utilisation d'hypothèses très simplificatrices concernant la technologie, les coûts, et les fonctions de demande des ressources. Notons que l'hypothèse d'une demande inverse bornée pour le gravier peut être justifiée par l'existence d'un substitut disponible à partir d'un certain niveau de prix de la ressource et qu'en l'absence de coûts fixes ou de coûts dépendant de l'extraction passée, nos résultats peuvent se généraliser en raisonnant en termes de gains nets des coûts marginaux d'exploitation.

La propriété du sol est divisée entre une infinité d'agents rationnels qui peuvent être indifféremment cultivateurs ou exploitants de carrière. Cette dernière hypothèse est réaliste dans la mesure où la propriété foncière est suffisamment morcelée et où la distinction propriétaires / exploitants a peu d'incidence sur l'extraction à coûts moyens d'exploitation constants.

Remarquons que pour être entreprise avant l'extraction, l'activité agricole spécifique doit être plus rémunératrice que l'activité résiduelle, donc par construction $\alpha - \beta L > R$, le membre gauche de l'inégalité étant égal au revenu ponctuel instantané permis par l'activité agricole spécifique en l'absence d'extraction.

Les agents possèdent une information parfaite sur les prix futurs des deux biens, soit qu'ils effectuent des prévisions parfaites concernant l'évolution des prix, soit qu'il existe un système complet de marchés permettant de contracter sur la totalité du futur à l'instant $t = 0$. Chaque agent se manifeste sur les marchés via un ensemble d'offres instantanées de gravier et de vin, conditionnées par l'évolution prévue des prix. Les agents adoptent un comportement concurrentiel i.e. ils considèrent les prix prévus comme donnés ; les prix sont alors déterminés à l'équilibre entre offre et demande sur les deux marchés. Pour qu'il existe un équilibre intertemporel, les prix ainsi déterminés doivent être égaux à tout instant à leurs valeurs prévues par les agents lors de l'établissement de leurs plans d'offre.

Soient $\Upsilon_m = \{t \in [0,\infty) \mid Q_m(t) > 0\}$ et $\Upsilon_a = \{t \in [0,\infty) \mid Q_a(t) > 0\}$ respectivement les périodes d'activités du marché du matériau et du bien agricole. Lorsqu'un marché est inactif le prix que doit considérer un offreur potentiel sur ce marché est le prix correspondant à une offre infiniment petite, soit a pour le marché de la ressource non renouvelable et α pour le marché du bien agricole.

Les prix envisagés par un agent lors de l'établissement de son plan d'offre sont donc de la forme :

$$P_m(t) = \begin{cases} \text{prix de marché} & \forall\, t \in Y_m \\ a & \forall\, t \notin Y_m \end{cases}$$

$$P_a(t) = \begin{cases} \text{prix de marché} & \forall\, t \in Y_a \\ \alpha & \forall\, t \notin Y_a \end{cases}$$

Afin de compléter ce modèle d'équilibre partiel, on suppose que les gains tirés de l'exploitation du sol peuvent être placés sur le marché des capitaux avec un taux d'intérêt r, constant et positif.

Le possesseur d'un point l quelconque doit donc arbitrer entre deux options possibles :

affecter indéfiniment le sol à l'activité agricole spécifique, ce qui lui procure un flux de revenus $\{P_a(t)\}_0^\infty$. Son gain total actualisé en $t = 0$ est alors :

$$V_a(0) = \int_0^\infty e^{-rx} P_a(x)dx \tag{3}$$

Le plan de production correspondant à cette option est :

$$P_a(l) = \{\forall\, t \in [0,\infty),\ (q_a(l,t),\ q_m(l,t)) = (1,0)\} \tag{4}$$

$q_a(l,t)$ et $q_m(l,t)$ désignant respectivement l'offre instantanée de bien agricole et de matériau au point l.

. poursuivre l'exploitation agricole jusqu'à une date Y, extraire à partir de cette date puis se consacrer à l'activité résiduelle. On montre que s'il est impossible de stocker la ressource sur place et si le processus d'extraction est instantané, la mise sur le marché du matériau doit s'effectuer en une fois (cf. infra). Le grain actualisé permis par cette opération est alors :

$$V(0,Y,\ l) = e^{-rY}[p_m(Y) - vl] + \int_0^Y e^{-rx} p_a(x)dx + \int_Y^\infty Re^{-rx}dx \tag{5}$$

Le premier terme de la somme est la recette nette actualisée permise par la vente du matériau en Y, le second terme est le gain actualisé permis par l'activité agricole spécifique avant Y, le troisième terme est le gain actualisé issu de l'activité résiduelle après Y.

Le plan de production correspondant à cette option est $q_r(t)$ désignant la production résiduelle instantanée au point l,

$$P_m(l,Y) = \begin{cases} (q_a(t),\ q_m(t),\ q_r(t)) = (1,0,0) & \forall\, t < Y \\ (q_a(t),\ q_m(t),\ q_r(t)) = (0,1,0) & t = Y \\ (q_a(t),\ q_m(t),\ q_r(t)) = (0,0,1) & \forall\, t > Y \end{cases} \tag{6}$$

Remarquons que l'ensemble de production est non convexe. En effet, posons pour simplifier $q_r(t) = 0$; soit γ la proportion de matériau extraite à une date Y_1 au point l $(0 < \gamma < 1)$ et $(1 - \gamma)$ la proportion extraite à une date Y_2 avec $Y_1 < Y_2$. On vérifie immédiatement :

$$\gamma P_m(l,Y_1) + (1-\gamma)\, P_m(l,Y_2) = \begin{cases} (1,0) & \forall\, t < Y_1 \\ (1-\gamma,\gamma) & t = Y_1 \\ (1-\gamma,0) & \forall\, t \in\,]Y_1,Y_2[\\ (0,1-\gamma) & t = Y_2 \\ (0,0) & \forall\, t > Y_2 \end{cases}$$

$$> P(\gamma,l,Y_1,Y_2) = \begin{cases} (1,0) & \forall\, t < Y_1 \\ (0,\gamma) & t = Y_1 \\ (0,0) & \forall\, t \in\,]Y_1,Y_2[\\ (0,1-\gamma) & t = Y_2 \\ (0,0) & \forall\, t > Y_2 \end{cases}$$

Toutefois on montre que le choix technologique consistant à mettre sur le marché à deux dates différentes le matériau contenu au point l est économiquement non pertinent. En effet, considérons le gain permis par la mise sur le marché d'une proportion γ de ressource à une date t_1 et d'une proportion $(1-\gamma)$ à une date t_2 $(t_1 < t_2$ et $0 < \gamma < 1)$:

$$V(0,\gamma,t_1,t_2,l) = \gamma[p_m(t_1) - vl]e^{-rt_1} + \int_0^{t_1} p_a(x)e^{-rx}dx + (1-\gamma)[p_m(t_2) - vl]e^{-rt_2} + \int_{t_2}^{\infty} Re^{-rx}dx \quad (7)$$

puisque toute activité agricole est interdite sur $[t_1,t_2]$.

On vérifie aisément en exprimant $V(0,l,t_1)$ et $V(0,l,t_2)$ par (5) que :

$$V(0,\gamma,t_1,t_2,l) < \gamma\, V(0,t_1,l) + (1-\gamma)\, V(0,t_2,l) \quad (8)$$

Le gain peut être accru en reportant la totalité des ventes à l'instant $\bar{t} \in \{t_1,t_2\}$ tel que $V(0,\bar{t},l)$ est maximal. Dans ces conditions la non-convexité du plan de production n'interdit pas l'existence d'un équilibre intertemporel.

Section II : CARACTÉRISATION D'UN ÉQUILIBRE INTERTEMPOREL

Le problème du possesseur d'un point l est :

$$\text{(P.1)} \quad \max_{Y} V(0,Y,l)$$

Sous réserve de différentiabilité, une condition nécessaire de premier ordre d'optimalité du choix d'une date t d'extraction du point l est :

$$\frac{dp_m}{dt} - r[p_m(t) - vl] + p_a(t) - R = 0 \quad (9)$$

À l'instant t, on doit avoir égalité entre le gain marginal brut $[\frac{dp_m}{dt} + p_a(t)]dt$ permis par la conservation d'une unité de ressource entre t et $(t + dt)$ et le coût marginal d'opportunité $[r(p_m(t) - vl) + R]dt$ impliqué par la vente de cette unité entre t et $t + dt$.

La relation (9) est une condition de premier ordre locale qui doit être nécessairement vérifiée à tout instant, le long d'un couple de sentiers d'équilibre $\{p_m(t),p_a(t)\}_{t \in \Upsilon}$, $P = \Upsilon_m \cup \Upsilon_a$, des prix des ressources.

On montre d'autre part :

Proposition 1 : Un couple de sentiers d'équilibre des prix, s'il existe, et la chronologie d'exploitation correspondante présentent nécessairement les caractéristiques suivantes :

(i) L'extraction ne subit aucune interruption momentanée ;
(ii) il existe un front d'extraction, noté $l\ (t)$, continu et croissant en t ;
(iii) le prix du matériau est constamment croissant en t sur Υ_m et tend vers a ;
(iv) il existe un point limite $\bar{l}$, unique, au-delà duquel l'extraction n'est plus rentable ; l'extraction du gisement sera complète si et seulement si $\bar{l} > L$, incomplète sinon.

$$\bar{l} = \frac{ra - \alpha + \beta L + R}{\beta + rv} \tag{10}$$

Démonstration : cf. appendice.

De (ii) on déduit qu'à tout instant le long d'un sentier d'équilibre la quantité de terre consacrée à l'activité agricole spécifique (égale à la production agricole lorsque la densité est unitaire) est $L - l(t)$. Mais puisque la densité de matériau est unitaire :

$$l(t) = \int_0^t Q_m(x)dx \tag{11}$$

donc

$$Q_a(t) = L - \int_0^t Q_m(x)dx \tag{12}$$

et d'après (2) :

$$p_a(t) = \alpha - \beta(L - \int_0^t Q_m(x)dx) \tag{13}$$

le long d'un sentier d'équilibre. De plus d'après (1), à l'équilibre :

$$Q_m(t) = \frac{1}{b}\ (a - p_m(t)) \tag{14}$$

Le système de conditions {(11), (12), (13), (14)} nous permet d'expliciter à l'équilibre la rétroaction de l'extraction du point l sur les coûts de transport et les valeurs agricoles des points non encore extraits par la condition (9) :

$$\frac{dp_m}{dt} - r\, p_m(t) + \frac{rv + \beta}{b}\int_0^t (a - p_m(x))dx + \alpha - \beta L - R = 0$$

En différenciant par rapport au temps cette relation, on en déduit une deuxième condition vérifiée nécessairement le long de tout sentier d'équilibre du prix du matériau :

$$\frac{d^2p_m(t)}{dt} - r\,\frac{dp_m(t)}{dt} - \frac{rv + \beta}{b}\, p_m(t) + \frac{a(rv + \beta)}{b} = 0 \;\; \forall\, t \in \Upsilon_m \qquad (15)$$

Notons que l'on peut exprimer $p_a(t)$ en fonction de $p_m(t)$:

$$p_a(t) = \alpha - \beta L + \frac{l}{b}\int_0^t (a - p_m(x))dx \qquad (16)$$

L'étude de l'équilibre intertemporel sur les deux marchés peut donc se ramener à l'étude de l'équilibre sur le seul marché du matériau.

Tout sentier d'équilibre $\{p_m(t)\}_{t \,\in\, \Upsilon_m}$ doit être solution de (15). Une solution de (15) est la somme d'une solution particulière et d'une solution générale de l'équation sans second membre. D'après (iii), $p_m = a$ est une solution particulière de (15), la solution générale est donc de la forme :

$$p_m(t) = a + \lambda_1 e^{r_1 t} + \lambda_2 e^{r_2 t} \qquad (16)$$

où r_1 et r_2 sont les racines du polynôme caractéristique :

$$r_1 = \frac{1}{2}[r + (r^2 + \frac{4(rv+\beta)}{b})^{\frac{1}{2}}] \qquad (17.a)$$

$$r_2 = \frac{1}{2}[r - (r^2 + 4(rv+\beta)\,/\,b)^{\frac{1}{2}}] \qquad (17.b)$$

λ_1 et λ_2 sont deux constantes à déterminer. D'après (i), Υ_m est convexe de la forme $[0,\infty)$ ou $[0,T_m]$, T_m désignant la date finale d'extraction. Tout sentier d'équilibre est entièrement caractérisé par la donnée d'un triplet $(\lambda_1,\lambda_2,T_m)$. On montre qu'un tel triplet existe et peut être déterminé de façon univoque par le système des trois conditions nécessaires suivant :

a) *Condition terminale*

D'après (iii), $\lim_{t \to T_m} p_m(t) = a$; soit en utilisant (16) et la continuité de $p_m(.)$:

$$\lambda_1 e^{r_1 T_m} + \lambda_2 e^{r_2 T_m} = 0 \qquad (18)$$

b) *Condition de premier ordre finale*

D'après (iv), la condition de stock est :

$$l(T_m) = \int_0^{T_m} Q_m(t)dt = \min(\bar{l},L) \quad (19)$$

La relation (9) est vérifiée à gauche de T_m, en tenant compte de (16) et après calculs on obtient :

$$-r_2\lambda_1 \lim_{t\to T_m} e^{r_1 t} - r_1\lambda_2 \lim_{t\to T_m} e^{r_2 t} = (ra-\alpha+\beta L+R) - (rv+\beta)\min(\bar{l},L) \quad (20)$$

Remarquons que le membre droit de (20) s'annule lorsque $\min(\bar{l}, L) = \bar{l}$ d'après (10). Portant (18) dans (20) on en déduit dans ce cas :

$$(r_1 - r_2)\lambda_1 \lim_{t\to T_m} e^{r_1 t} = 0$$

L'unique solution du système de conditions {(18), (20)} lorsque $\bar{l}$,< L est alors $\lambda_1 = 0$ et T_m infinie d'après (18).

c) *Condition de premier ordre initiale*

La relation (9) doit être vérifiée en $t = 0$, on en déduit :

$$- r_2\lambda_1 - r_1\lambda_2 = ra - \alpha + \beta L + R \quad (21)$$

Proposition 2 : Il existe un couple unique de sentiers d'équilibre $\{p_m(t), p_a(t)\}$ $t \in$ Y présentant les caractéristiques suivantes :

(i) $\bar{l} < L$

- $Y_m \equiv Y_a = [0,\infty)$ (22.a)
- $p_m(t) = a - (ra - \alpha + \beta L + R)e^{r_2 t}/r_1$ (22.b)
- $p_a(t) = \alpha - \beta L + \beta\bar{l}\,(1-e^{r_2 t})$ (22.c)

(ii) $L < \bar{l}$

- $Y_m = Y_a = [0,T_m]$, T_m finie (23.a)
- $p_m(t) = a + [r(a - vL) + R - \alpha[e^{r_1(t-T_m)} + e^{r_2(t-T_a1^m)}] / r_1 - r_2$ (23.b)
- T_m est l'unique solution de :

$$r_1e^{-r_2T} - r_1e^{-_2T} = \frac{ra + R - \alpha + \beta L}{r(a-vL)-\alpha+R}(r_2 - r_1) \quad (23.c)$$

Démonstration : cf. appendice

Bien que les demandes soient bornées supérieurement, la durée d'extraction peut être infinie. Ce résultat paradoxal n'est pas sans rappeler un résultat analogue obtenu par S. Salant, M. Eswaran et T. Lewis (1983) dans le cadre d'un modèle d'exploitation d'une ressource non renouvelable dont le coût d'extraction dépend de l'extraction cumulée. Remarquons que de manière analogue au cas d'une ressource dont l'extraction devient plus coûteuse au fur et à mesure de l'épuisement du gisement, l'extraction du matériau en un point l a pour conséquence d'une part d'accroître le coût de transport du matériau restant en terre d'après le point (ii) de la proposition 1, et d'autre part d'accroître la perte en capital agricole entraînée par l'extraction des unités restantes en raison de l'augmentation de prix du bien agricole spécifique due à la diminution de l'offre disponible le long d'un sentier d'équilibre. Donnons une interprétation intuitive de ce résultat.

Le possesseur du point $\bar{l}$ doit être indifférent entre extraire et poursuivre indéfiniment l'activité agricole spécifique. Supposons qu'il extrait à une date finie T, la recette nette actualisée tirée de la vente du matériau est bornée supérieurement et le flux de revenu résiduel après extraction est inférieur au flux de revenu permis par l'activité agricole spécifique. Il est clair qu'à cette date finie T il n'est pas indifférent entre extraire et poursuivre indéfiniment l'activité agricole spécifique d'où une contradiction.

Section III : OPTIMALITÉ ET ÉQUILIBRE

Supposons que la gestion du patrimoine foncier soit assurée par un planificateur dont l'objectif est la maximisation du surplus social net actualisé. Le surplus social net instantané en t est :

$$SN(t) = S_m(t) + S_a(t) - C(t) + R\mu(L(t)) \tag{24}$$

où $S_m(t)$ désigne le surplus des utilisateurs de matériau soit :

$$S_m(t) = \int_0^{\min\{Q_m(t), a/b\}} (a - bQ_m)dQ_m \tag{25}$$

$S_a(t)$ est le surplus des consommateurs de bien agricole spécifique :

$$S_a(t) = \int_0^{\min\{Q_a(t), \alpha/\beta\}} (\alpha - \beta Q_a)dQ_a \tag{26}$$

$C(t)$ est le coût social de transport à la ville de matériau :

$$C(t) = vl(t)Q_m(t) \tag{27}$$

$Q_m(t)$ étant la quantité livrée à l'instant t, extraite le long d'un sentier optimal à une distance $l(t)$ de la ville.

R est une évaluation du revenu social résiduel instantané, $L(t)$ désigne l'ensemble des points supportant l'activité résiduelle à l'instant t et $\mu(.)$ sa mesure ; r est le taux d'actualisation social supposé croissant et positif.

On vérifie aisément que le long d'un sentier optimal d'exploitation des ressources $\{Q_m(t), Q_a(t)\}_{t=0}^{\infty}$, l'extraction ne s'interrompt pas momentanément, qu'elle tend à s'éloigner progressivement de la ville, i.e. il existe un front d'extraction, noté $l(t)$, fonction continue, croissante de t. Un sentier optimal comprend donc au plus deux phases, l'une notée $[0,T_m[$ durant laquelle l'extraction a lieu ($Q_m(t) > 0 \ \forall\, t \in [0,T_m[$), T_m pouvant être infinie, l'autre notée $[T_m,\infty)$ durant laquelle $Q_m = 0$. D'autre part on vérifie immédiatement que le long d'un sentier optimal, nécessairement $\min\{Q_a(t), \alpha/\beta\} = Q_a(t)$ et $\min\{Q_m(t), a/b\} = Q_m(t)$.

Notons que nécessairement le long d'un sentier optimal à tout instant :

$$Q_a(t) = L - l(t) \tag{28}$$

La maximisation du surplus social net actualisé peut donc se formuler plus simplement comme un problème de contrôle à une variable de commande $Q_m(.)$ et une variable d'état $l(.)$:

$$\text{P2} \qquad \underset{\{Q_m(.)\}_0^{T_m},\ T_m}{\text{Max}} \quad \int_0^{T_m} e^{-rt} SN(t)dt + \int_{T_m}^{\infty} e^{-rt}[S_a(t) + Rl(T_m)]dt \tag{29}$$

$$\begin{array}{llll} \text{s/c} & dl(t)/dt = Q_m(t) & \forall\, t \in [0,T_m[& (29.a) \\ & L - l(t) \geq 0 & \forall\, t \in [0,\infty) & (29.b) \\ & Q_m(t) \geq 0 & \forall\, t \in [0,\infty) & (29.c) \\ & l(0) = 0 & T_m \text{ libre} & \end{array}$$

Le problème est non dégénéré, i.e. $T_m \neq 0$, ou il existe au moins un instant t tel que $Q_m(t) > 0$, si la condition suivante est vérifiée :

$$ra - \alpha + \beta L + R > 0 \tag{30}$$

Proposition 3 :

Le programme (22) admet une solution unique $\{\{Q_m^*(t)\}_0^{T_m^*}, T_m^*\}$ sous réserve que la condition suffisante d'optimalité $v^2 \leq b\beta$ soit vérifiée telle que :

(i) soit $\bar{l} = (ra - \alpha + \beta L + R)/\beta + rv$ (31)

$$\bar{l} < L \Rightarrow \begin{cases} T_m^* \text{ infinie} \\ \overset{*}{l}(\overset{*}{T}_m) = \bar{l} \end{cases} \tag{31.a}$$

$$\bar{l} < L \Rightarrow \begin{cases} T_m^* \text{ finie} \\ \overset{*}{l}(\overset{*}{T}_m) = L \end{cases} \tag{31.b}$$

(ii) $\bar{l} < L$

$$Q_m^*(t) = \frac{ra - \alpha + R + \beta L}{br_1} e^{r_2 t} \ \forall\, t \in [0,\infty) \tag{32}$$

(iii) $\bar{l} > L$

$$Q_m^*(t) \begin{cases} = \dfrac{r(a - vL) - \alpha + R}{b(r_1 - r_2)} [e^{r_2(t - T_m^*)} - e^{r_1(t - T_m^*)}] & \forall\, t < T_m^* \\ = 0 \qquad \forall\, t \geq T_m^* \end{cases} \tag{33}$$

(iv) T_m^* est l'unique solution de :

$$r_2 e^{-r_1 T_m} - r_1 e^{-r_2 T_m} = \frac{(ra - \alpha + R + \beta L)\,(r_1 - r_2)}{ra - \alpha + R - rvL} \tag{34}$$

Démonstration : cf. appendice.

Le rythme d'extraction correspondant au sentier de prix d'équilibre de la section II est :

$$Q_m(t) = -\frac{1}{b}(\lambda_1 e^{r_1 t} + \lambda_2 e^{r_2 t}) \tag{35}$$

Portons les expressions de λ_1 et λ_2 dans (35) on en déduit par (33), $Q_m(t) = Q_m^*(t)$ à tout instant dans tous les cas. Le rythme d'extraction correspondant au sentier de prix d'équilibre est donc optimal au sens de la maximisation du surplus social net actualisé lorsque le taux d'actualisation social est égal au taux d'intérêt. Durée d'extraction et point-limite d'extraction sont identiques dans les deux régimes, et on en déduit que le sentier d'équilibre des prix suscite un plan d'offre optimal dans un système de marchés concurrentiels avec prévisions parfaites.

Section IV : DYNAMIQUE COMPARATIVE

Le paramètre taux d'intérêt joue un rôle important dans la dynamique de l'équilibre intertemporel, en particulier il paraît intéressant de connaître la sensibilité du sentier d'équilibre du prix du matériau à une variation de r, vu le peu de réalisme de l'hypothèse de fixité du taux d'intérêt faite section I.

a) *Cas d'une exploitation incomplète*

Supposons $\bar{l} < L$ et considérons une variation positive de r, $dr > 0$, telle que $\bar{l} + \dfrac{d\bar{l}}{dr} < L$ i.e. on néglige le cas critique $\bar{l} = L$. Différencions totalement $p_m(t)$ par rapport à r d'après (16) :

$$dp_m(t)/dr = (d\lambda_2/dr + \lambda_2(dr_2\,/dr)t)e^{r_2 t} \tag{36}$$

or d'après (17.b) :

$$dr_2/dr = \frac{1}{2}\ [1\ -(\frac{r^2b^2 + 4rvb + 4rv^2}{r^2b^2 + 4rvb + 4b\beta})^{\frac{1}{2}}\ ] \tag{37}$$

donc $dr_2/dr \lesseqgtr 0$ selon que $v^2 \gtreqless \beta b$. On remarque que les conditions suffisantes d'optimalité ne sont pas vérifiées lorsque $v^2 > b\beta$.

• $v^2 > b\beta$

D'après (22.b)

$$d\lambda_2/dr = b[(d\bar{l}/dr)r_2 + \bar{l}(dr_2/dr)] \tag{38}$$

La différenciation de $\bar{l}$ par rapport à r donne $d\bar{l}/dr > 0$ et $dr_2/dr < 0$ dans ce cas, donc $d\lambda_2/dr < 0$. On en déduit :

$$dp_m(0)/dr = d\lambda_2/dr < 0. \tag{39}$$

Le sentier de prix d'équilibre pivote autour d'une date $\bar{t}$ telle que :

$$\bar{t} = -\ (d\lambda_2/dr)\ /\ \lambda_2(dr_2/dr) > 0 \tag{40}$$

$$\frac{dp_m(t)}{dr} \lesseqgtr 0 \text{ selon que } t \lesseqgtr \bar{t} \tag{41}$$

Un accroissement du taux d'intérêt dans ce cas a pour effet d'accélérer le rythme d'extraction dans un premier temps puis de le freiner. Puisque $d\bar{l}/dr > 0$, le premier effet doit l'emporter sur le second, au total le prix du bien agricole devrait s'accroître à tout instant à l'équilibre par rapport à sa valeur initiale.

• $v^2 \leq$ bβ

On peut réécrire $d\lambda_2/dr$ plus commodément :

$$d\lambda_2/dr = (1/r_1^2)[(-\alpha + R + \beta L)\quad \frac{dr_1}{dr} + a(r\frac{dr_1}{dr} - r_1)] \tag{42}$$

Le premier terme est négatif puisque $\alpha - \beta L > R$ et $dr_1/dr > 0$. Développant et réarrangeant le second terme on en déduit :

$$r\ \frac{dr_1}{dr} - r_1 = -\ (r^2 + 4\ \frac{(rv + \beta)}{b})^{\frac{1}{2}}\ (\frac{rv + \beta}{b}) < 0 \tag{43}$$

Par conséquent $dp_m(0)/dr = d\lambda_2/dr < 0$. D'autre part $dr_2/dr > 0$ dans ce cas donc :

$$dp_m(t)/dr < 0 \qquad\qquad \forall\ t \in [0,\infty) \tag{44}$$

Proposition 4 : Lorsque $\bar{l} < L$, un accroissement du taux d'intérêt, toutes choses égales par ailleurs, a pour conséquence le long d'un sentier d'équilibre :

- d'accroître le volume total extrait : $d\bar{l}/dr > 0$
- si $v^2 > b\beta$, le prix agricole augmente, le prix du matériau tend à diminuer dans un premier temps et à augmenter ensuite.
- si $v^2 \leq b\beta$, le prix agricole tend à augmenter, le prix du matériau à diminuer.

b) *Cas d'une exploitation complète.*

Dans ce cas, il est beaucoup plus difficile de prédire le signe de $dp_m(t)/dr$; des simulations de variation de r pour un large échantillon de valeurs des paramètres conduisent à dp_m/dr négatif puis positif. Intuitivement, ce résultat peut se justifier en remarquant que l'effet d'un accroissement de r est de diminuer la valeur actualisée des pertes agricoles dues à l'extraction en tout point et donc d'avancer la date optimale d'extraction d'un point de terre l.

CONCLUSION

Lorsque l'exploitation d'une ressource non renouvelable entre en conflit avec l'exploitation d'un bien agricole (ressource renouvelable) pour l'appropriation du sol, support commun des deux activités, le plan de production intertemporel des ressources présente une non-convexité.

Toutefois cette non-convexité n'interdit pas l'existence d'un équilibre intertemporel dans un système de marchés concurrentiels avec prévisions parfaites pour les deux ressources. D'autre part, sous certaines conditions supplémentaires, cet équilibre sera optimal au sens du critère de la maximisation du surplus social net actualisé. Il est difficile d'évaluer les conséquences d'une variation du taux d'intérêt sur le sentier d'équilibre des prix, en particulier les effets d'une variation de r dépendent des coûts et des valeurs relatives des pentes des fonctions de demande. Enfin, remarquons que la durée d'exploitation d'un stock fini de ressource peut être infinie, même si les fonctions de demande sont bornées supérieurement.

APPENDICE

Proposition 1 : Démonstration

(i) Supposons $Q_m(t) = 0, \forall\, t \in [t_1,t_2]$ et soit $l(t_2)$ le point de terre extrait à la date t_2. Si t_2 est une date optimale d'extraction du point $l(t_2)$:

$$\forall\, t \in [t_1,t_2] \quad V(0,t,l(t_2)) \leq V(0,t_2,l(t_2)) \qquad \text{(A1)}$$

Soit

$$[p_m(t) - vl(t_2)]e^{-rt} - [p_m(t_2) - vl(t_2)]e^{-rt_2} - \int_t^{t_2}[p_a(x) - R]e^{-rx}dx \leq 0 \quad \text{(A2)}$$

Puisque $t \notin \Upsilon_m$, $p_m(t) = a$, $p_a(x)$ est borné supérieurement et $p_a(x) - R > 0$, passant à la limite quand $t \to t_2$ on en déduit :

$$[a - p_m(t_2)]e^{-rt_2} \leq 0 \quad \text{(A3)}$$

d'où une contradiction puisque p_m est borné supérieurement par a.

(ii) De (i) et de (1), on déduit la continuité de $p_m(.)$ en t, donc $V(0,t,l)$ est continue en t en un point l. D'autre part $\partial V/\partial\, l < 0$ et $\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial V}{\partial l}) > 0$, on en déduit que l'ensemble des dates telles que $\frac{\partial V(l)}{\partial t} = 0$ est une fonction croissante de l, i.e. l'extraction tend à s'éloigner de la ville au cours du temps, i.e. $l(t)$ est croissante en t.

Montrons qu'elle est continue. Supposons qu'il existe un intervalle $[\bar{l},\bar{l} + \epsilon[, \epsilon > 0$, non exploité et une date $\bar{t}$ telle que $l(\bar{t}) = \bar{l} + \epsilon$, *i.e.* l'extraction est reprise à la date $\bar{t}$ au point $\bar{l} + \epsilon$.

Puisque $l(t)$ est croissante, pour tout $t < \bar{t}$, $l(t) < l(\bar{t})$. Soit $l \in [\bar{l},\bar{l} + \epsilon[$, puisque $\partial V/\partial l < 0$:

$$V(0,\bar{t},l) > V(0,\bar{t},\bar{l} + \epsilon)$$

Et puisque le possesseur du point $\bar{l} + \epsilon$ a intérêt à extraire en $\bar{t}$:

$$V(0,\bar{t},\bar{l} + \epsilon) \geq V_a(0)$$

donc $V(0,\bar{t},l) > Va(0)$. Le possesseur du point l aurait intérêt à extraire, d'où une contradiction.

(iii) Supposons qu'il existe une date t telle que $dp_m(t)/dt < 0$. Le long d'un sentier d'équilibre on aurait :

$$dp_m/dt = r[p_m(t) - vl(t)] - p_a(t) + R < 0 \quad \text{(A4)}$$

Pour que le possesseur du point $l(t)$ mette sur le marché le matériau qu'il recèle, il faut que $V(0,t,l(t)) \geq V_a(0)$. Soit :

$$e^{-rt}[p_m(t) - vl] \geq \int_t^{\infty}[p_a(x) - R]e^{-rx}dx \quad \text{(A5)}$$

Par conséquent d'après (A4) :

$$e^{-rt}[p_a(t) - R]/r \geq \int_t^{\infty}[p_a(x) - R]e^{-rx}dx \quad \text{(A6)}$$

d'où une contradiction puisque $p_a(x) - R > 0$ à tout instant.

Soit $T_m = \sup\{t \mid t \in \Upsilon_m\}$, supposons $\lim_{t \to T_m} p_m(t) = \bar{p} < a$.

Si T_m est finie, un offreur potentiel juste avant T_m à un prix proche de $\bar{p}$, aurait intérêt à reporter son offre juste après T_m pour vendre au prix $a > \bar{p}$. $\bar{p}$ ne peut donc être un prix d'équilibre en T_m. Si T_m est infinie, $\lim_{t \to \infty} p_m(t) < a$ entraîne que l'offre de matériau et donc le rythme d'extraction serait indéfiniment positif strictement ce qui est impossible avec un stock fini. On en déduit $\lim_{t \to T_m} p_m(t) = a$.

• (iv) Considérons $l \in \mathbb{R}$, le domaine de définition de $V(l)$ est alors $\mathbb{R}$, $V_a(0)$ étant bornée supérieurement, il existe au moins un couple $(\bar{t}, \bar{l}$ tel que $V(\bar{t}, \bar{l}) = V_a(0)$. Pour tout $l > \bar{l}$, puisque $V(.)$ est décroissante en l, $V(\bar{t}, l) < V_a(0)$. Exprimons l'égalité de définition :

$$e^{-r\bar{t}}[p_m(\bar{t}) - v\bar{l}] = \int_{\bar{t}}^{\infty} [p_a(x) - R]e^{-rx}dx \tag{A7}$$

Après $\bar{t}$, l'extraction s'arrête car non rentable donc $p_a(x)$ est constant à partir de cette date, égal à $\alpha - \beta(L - \bar{l})$ à l'équilibre. D'autre part $p_m(\bar{t}) = a$ donc :

$$e^{-r\bar{t}}[a - v\bar{l}] = e^{-r\bar{t}}(1/r)[\alpha - \beta(L - \bar{l}) - R] \tag{A8}$$

Une condition suffisante (et nécessaire si $\bar{t}$ est finie) pour que (A8) soit vérifiée est :

$$\bar{l} = (ra + \beta L - \alpha + R)/(rv + \beta) \tag{A9}$$

Remarquons que (A9) est également vérifiée lorsque $\bar{t}$ est infinie. Considérons la structure de Y_m, d'après (i) on en déduit $\bar{t} = \sup\{t \mid t \in Ym\}$.

De $\lim_{t \to \infty} p_m(t) = a$ on en déduit $\lim_{t \to \infty} \frac{dp_m}{dt} = 0$, donc à l'équilibre en passant à la limite dans la condition de premier ordre ((9) section II) :

$$r[\lim_{t \to \bar{t}} p_m(t) - v \lim_{t \to \bar{t}} l(t)] - \lim_{t \to \bar{t}} p_a(t) + R = 0$$

Soit $r(a - v\bar{l}) = \alpha - \beta(L - \bar{l}) - R$

La condition (A9) est donc nécessaire et suffisante.

Notons que nécessairement $\bar{l} > 0$ pour que l'extraction démarre sur $[0,L]$. Une condition suffisante d'extraction au moins partielle de $[0,L]$ est alors :

$$ra - \alpha + \beta L + R > 0 \tag{A10}$$

Notons également que $V(l)$ étant décroissante en l, l'extraction sera nécessairement complète si $\bar{l} \geq L$ et incomplète sinon.

Proposition 2 : Démonstration

• (i) Lorsque $\bar{l} < L$, l'extraction est incomplète donc $Y_a = [0,\infty)$. D'autre part, T_m infinie et $.112_1 = 0$ sont les seules solutions du système de conditions nécessaires {(18), (20)} donc $\Upsilon_m = [0,\infty)$, λ_2 se déduit immédiatement de (21):

$$\lambda_2 = -\frac{ra - \alpha + \beta L + R}{r_1} \tag{A11}$$

D'où (22.b); de (13) et (A9) on déduit immédiatement (22.c).

• (ii) La durée d'extraction T_m est nécessairement finie lorsque $\bar{l} > L$, l'extraction étant complète, le bien agricole spécifique ne peut plus être produit après T_m, d'où (23.a). En effet puisque $\min(\bar{l},L) = L$, en tenant compte de (18) on déduit de (20):

$$(r_1 - r_2)\lambda_1 \lim_{t \to T_m} e^{r_1 t} = r(a - vL) - \alpha + R \tag{A12}$$

qui ne peut être vérifiée que pour T_m finie; de (A12) on déduit immédiatement (23.b) et (23.c) en tenant compte de (21).

On vérifie que la condition suffisante de maximisation du gain permis par l'extraction $\partial^2 V/\partial t^2 < 0$ est nécessairement vérifiée le long d'un sentier d'équilibre.

Proposition 3 : Démonstration

Le Hamiltonien $H(Q_m,l,\Psi,t)$ associé au programme P2 est:

$$H = e^{-rt}[a\, Q_m(t) - (b/2)\, Q_m^2(t) + \alpha(L - l(t)) - (\beta/2)(L - l(t))^2$$
$$- vl(t)\, Q_m(t) + R\, l(t)] + \Psi(t)\, Q_m(t) \tag{A13}$$

Le système de conditions nécessaires d'optimalité est:

$$a - b\, Q_m(t) - vl(t) = -\Psi(t)e^{rt} \tag{A14.a}$$

$$v\, Q_m(t) + \alpha - \beta(L - l(t)) - R = \frac{d\Psi(t)}{dt}\, e^{rt} \tag{A14.b}$$

Supposons d'autre part que $SN(t) \geq 0$, i.e. le surplus net est non négatif à tout instant d'une part, et d'autre part qu'il existe au moins une solution de (A14.a.b) permettant de passer d'un état optimal du front d'extraction $l(t)$ à un autre. Une condition nécessaire et suffisante d'optimalité lorsque T_m est libre, finie ou infinie, (condition de transversalité) est alors:

$$\lim_{t \to T_m} Q_m(t)e^{-rt} = 0 \tag{A15}$$

Si la contrainte (29.b) n'est pas saturée en T_m, $l(T_m)$ est une variable libre déterminée à l'optimum par la condition nécessaire et suffisante (condition de transversalité) suivante:

$$[ra + R - \alpha + \beta L - (rv + \beta)l(T_m)]e^{-rT_m} = 0 \tag{A16}$$

Différencions (A14.a) par rapport au temps en tenant compte de (A14.b), on montre qu'il existe une solution du système (A14.a.b) $\{\hat{Q}_m(t)\}$, telle que le long d'un tel sentier l'exploitation se décompose en deux phases lorsque la condition suffisante (A10) est vérifiée :

$$\hat{Q}_m(t) \quad \begin{array}{llll} \hat{Q}_m(t) & = & \mu_1 e^{r_1 t} + \mu_2 e^{r_2 t} > 0 & \forall\, t \in [0, T_m] \\ \hat{Q}_m(t) & = & 0 & \forall\, t \in [T_m, \infty) \end{array} \tag{A17}$$

où (r_1, r_2) sont les racines de l'équation différentielle (16) et (μ_1, μ_2) deux constantes à déterminer.

Soit $\bar{l} = (ra + R - \alpha + \beta L)/(\beta + rv)$, notons $\hat{l}(t)$ l'extraction cumulée le long du sentier $\{\hat{Q}_m(t)\}$, et réexprimons (A14.a) :

$$d\hat{Q}_m/dt \; - \; r\hat{Q}_m(t) \; = \; - \; (rv + \beta)(\bar{l} - \hat{l}(t))/b \tag{A18}$$

En vertu de la condition de transversalité (A15) et de (A17), nécessairement $d\hat{Q}_m/dt < 0$, donc $\bar{l} \geq \hat{l}(t)$ en tout t puisque $l(.)$ est croissante. On montre aisément que tout sentier se terminant en T_m par une extraction cumulée $\hat{l}(T_m) < \bar{l}$ est dominé au sens du critère de la maximisation du surplus social par un sentier se terminant dans un voisinage aussi petit que l'on veut de $\bar{l}$. Un raisonnement analogue permet de montrer que lorsque $\bar{l} > L$ on a nécessairement $l(T_m) = L$.

La condition de transversalité (A16) est donc bien vérifiée lorsque $l(T_m) < L$. Notons que si T_m est infinie, $\lim_{t \to \infty} Q_m(t) = 0$ entraîne que μ_1 est nécessairement nul ainsi que $\lim_{t \to \infty} dQ_m(t)/dt$. On en déduit d'après (A18) que nécessairement si T_m est infinie :

$$\lim_{t \to \infty} l(t) = \bar{l} \tag{A19}$$

Supposons $\bar{l} > L$, alors nécessairement $l(T_m) \leq L$. Donc la condition (A19) ne peut être vérifiée pour T_m infinie, donc T_m est finie. Réciproquement si $\bar{l} < L$, T_m doit être infinie en vertu de (A17) et (A18), ce qui démontre (i).

Lorsque $\bar{l} < L$, T_m est infinie, $\mu_1 = 0$ donc $\hat{Q}_m(t) = \mu_2 e^{r_2 t}$. μ_2 est déterminée à l'optimum via (A14.a) exprimée en $t = 0$:

$$r_2\mu_1 \; + \; r_1\mu_2 \; = \; (ra \; + \; \alpha \; + \; R \; + \; \beta L)/b \tag{A20}$$

En posant $\mu_1^* = 0$, on déduit immédiatement (32).

Lorsque $\bar{l} > L$, le système de trois conditions nécessaires suivant :

- Condition de transversalité (A15) :

$$\mu_1 e^{r_1 T_m} \; + \; \mu_2 e^{r_2 T_m} \; = \; 0 \tag{A21.a}$$

• Condition de premier ordre (A14.a) à la limite en T_m

$$r_2\mu_1 \lim_{t \to T_m} e^{r_1 t} + r_1\mu_2 \lim_{t \to T_m} e^{r_2 t} = [r(a - vl) - \alpha + R]/b \qquad \text{(A.21b)}$$

• Condition de premier ordre (A14.a) en $t = 0$, (A20), admet une solution unique $(\mu_1^*, \mu_2^*, T_m^*)$. En tenant compte de (A21.a), on déduit (33) de (A21.b), puis (34) de (A20).

Une condition suffisante d'optimalité d'un programme $\{Q_m^*(t)]_0^\infty$ satisfaisant l'ensemble des conditions nécessaires est que $H^0(t,l,\Psi) = \max_{Q_m} H(t,l,.,\Psi)$ soit concave en l.

Un calcul élémentaire permet de montrer que cette condition est équivalente à la condition $v^2 \leq b\beta$.

BIBLIOGRAPHIE

AMIGUES, JEAN-PIERRE, « Conflit pour l'utilisation de la terre : gravier contre vin dans le Bordelais », thèse 3^e cycle, Université des Sciences Sociales de Toulouse (1984).

SALANT, S., ESWARAN, M., LEWIS, T., « The length of Optimal Extraction Programs when Depletion Affects Extraction Costs », *Journal of Economic Theory*, 31, (1983), pp. 364-374.

KEMP, M.C., LONG, N.V., « The Efficiency of Competitive Markets in a Context of Exhaustible Resources » in W. Eichhorn, R. Henn, K. Neumann et R.W. Shephard, *Economic Theory of Natural Resources*, Physica Verlag (1982), pp. 205-211.

LAFFONT, J.J., MOREAUX, M. « Bordeaux claret versus gravel : a rational expectations analysis », Cahier n° 8403, GREMAQ, Université des Sciences Sociales de Toulouse, 1984, communication à la conférence sur la théorie des ressources, Université Laval, juin 1984.